Mathematikunterricht und Raumvorstellung
… freie Raumvorstellungstests für Schulen

THOMAS MÜLLER, KREMS/DONAU (KPH WIEN/KREMS)

Der Mathematikunterricht hat von der Primarstufe bis zur Matura auch die Aufgabe, das Raumvorstellungsvermögen zu entwickeln und zu fördern. In den vorliegenden Zeilen geht es neben konkreten Beispielen für den Unterricht um diese räumliche Vorstellungsfähigkeit, deren Einbindung in bekannte Intelligenzmodelle und die Unterscheidung von Teilfaktoren zur besseren Messbarkeit. Hauptaugenmerk gilt einem 4-Faktoren-Modell, welches Ausgangspunkt für die Entwicklung eines freien Raumvorstellungstests für den Unterricht war. In einem Vorabprojekt wurde für den Faktor Mentale Rotation ein 7-minütiger Test entwickelt, an dem innerhalb weniger Wochen mehr als 3000 Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe teilnahmen. Für diesen Teiltest werden die Testentwicklung bis zur Normierung sowie die ersten Ergebnisse in Bezug auf Gender, Schulstufe und Schultyp aufgezeigt.

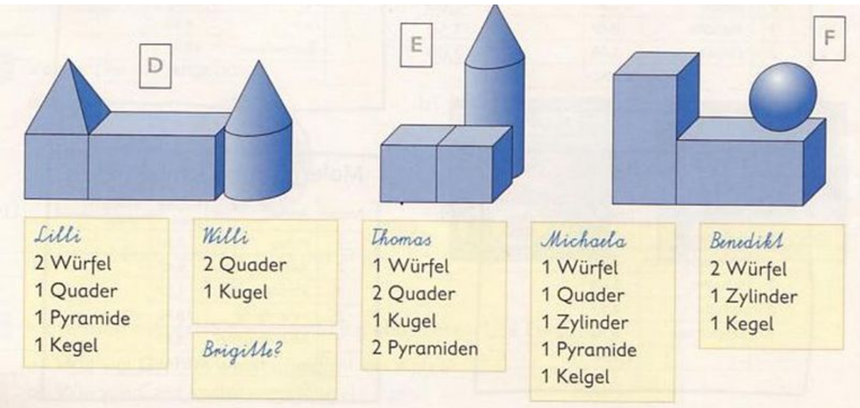
1. Raumintelligenzförderung im Mathematikunterricht

Ein Blick auf den Lehrplan[1] der AHS-Oberstufe zeigt im *Bildungsbereich Natur und Technik* die Forderung nach Vermittlung von *Abstraktions-und Raumvorstellungsvermögen als Voraussetzung für die Analyse und Lösung von Problemen.*
Im Lehrplan der AHS-Unterstufe[2] (wortident im NMS-Lehrplan) wird in den *Unterrichtszielen und Unterrichtsinhalten* im Geometriebereich vorgegeben, dass die Kinder *zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können* und *räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln.* Auch nach dem Lehrplan der Allgemeinen Sonderschule soll Raumvorstellung geschult werden.

Selbstredend ist für die Fachgegenstände *Geometrisches Zeichnen* (GZ) und *Darstellende Geometrie* (DG) die Entwicklung und Förderung der Raumvorstellung (RV) ein zentrales Anliegen und kein Nebenprodukt.
Da nach Umwandlung der Hauptschulen zu Neuen Mittelschulen GZ nicht mehr in allen Schulformen Pflichtgegenstand ist, wurde der Lehrplan für Mathematik an NMS um folgende Präambel ergänzt:

> „Sofern Geometrisches Zeichnen nicht als eigener Unterrichtsgegenstand geführt wird, sind im Unterricht von Mathematik die Grundzüge des Unterrichtsgegenstandes Geometrisches Zeichnen zu vermitteln."

Die Forderungen nach Entwicklung und Vermittlung des Raumvorstellungsvermögens sind keineswegs auf die Sekundarstufe beschränkt. Schon in der Primarstufe ist es ein verpflichtendes Anliegen des Mathematikunterrichts: *Räumliche Vorstellung ist* (sic!) *aufzubauen*, heißt es im Lehrplan[3].



Zur Illustration seien zwei Beispiele aus der vierten Schulstufe angeführt. Abbildung 1 dient als Veranschaulichungsübung zur Festigung der Wahrnehmung und zum Wiedererkennen von Grundkörpern.

Abb. 1: Grundkörper erkennen (Grosser/Koth 2007, p A71)

[1] https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/index.html [2016-05-25]

[2] https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5i81nt [2016-10-03]

[3] https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_vs_gesamt_14055.pdf?5i81op Seite 147 [2016-10-03]

Abbildung 2 ist als Orientierungsübung angelegt, wobei Fragen zu unterschiedlichen Ansichten gestellt werden.

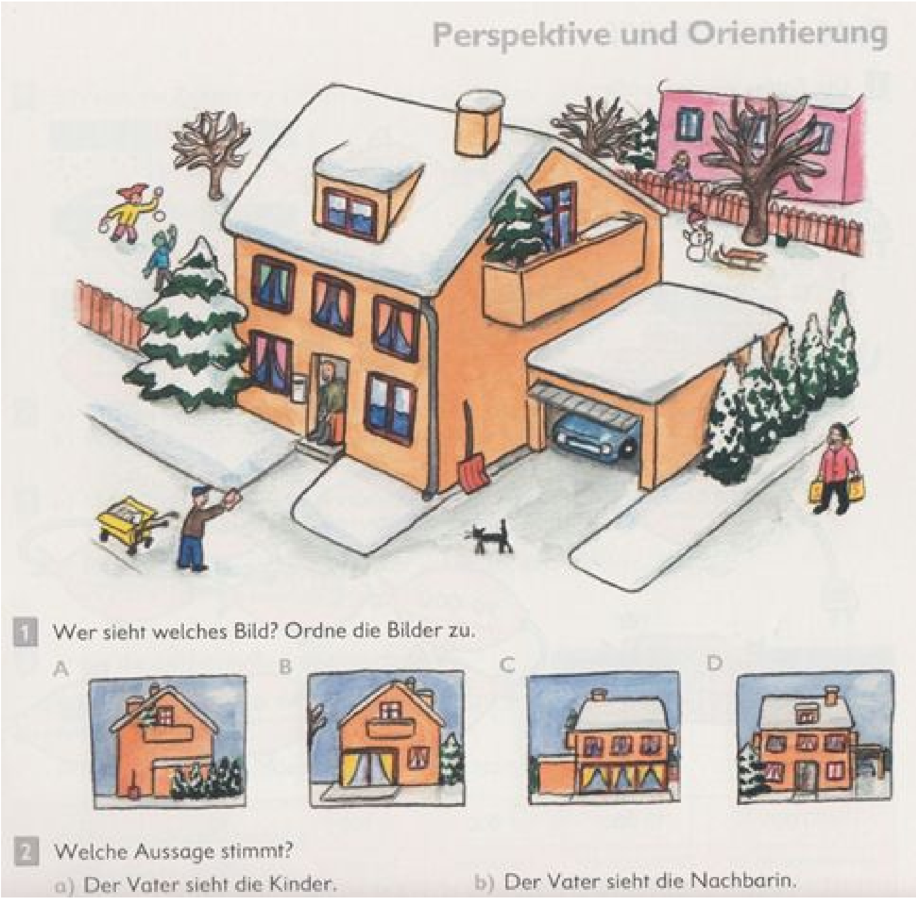


Abb. 2: Ansichten zuordnen (Grosser/Koth 2007, p B24)

In der einschlägigen Literatur wird meist zur Veranschaulichung der besten Zeitphase für die Entwicklungsförderung der Raumintelligenz die Grafik von Benjamin Bloom herangezogen (Abbildung 3). Danach ist die Raumvorstellung bis etwa zum 4. Lebensjahr von allen Intelligenzfaktoren (siehe 2.1) am schwächsten ausgebildet und der Zuwachs zwischen dem 7. und 13. Lebensjahr am größten. Danach sind etwa 80% des Leistungsvermögens vorhanden. Durch gezielten Unterricht kann auch in höherem Alter noch eine deutliche Steigerung des Raumvorstellungsvermögens erreicht werden, wie beispielsweise die Untersuchung von Günter Hanisch für das Fach Darstellende Geometrie in den 1980er und 1990er Jahren zeigt. (Hanisch 1984, Gittler 1994)

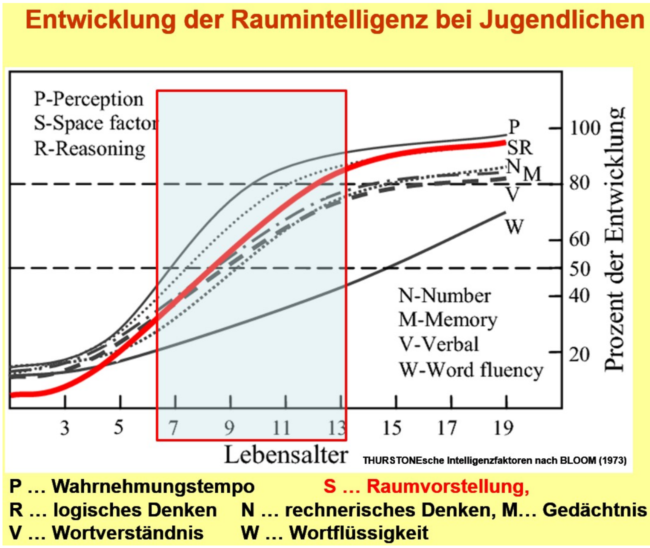


Abb. 3: Intelligenzentwicklung (Maier 1994, S. 78)

Zur weiteren Demonstration von schulischen Raumaufgaben seien einige Beispiele aus dem Bereich der Sekundarstufe 1 vorgestellt:

6. Schulstufe: In Abbildung 4 werden im ersten Beispiel zu einem real dargestellten Würfelabschnitt mögliche Netze gesucht, im zweiten Beispiel zu (nicht dargestellten) Quadern. Es geht in beiden Fällen um die sogenannte *Veranschaulichung* oder *räumliche Visualisierung* (vgl. 2.2).

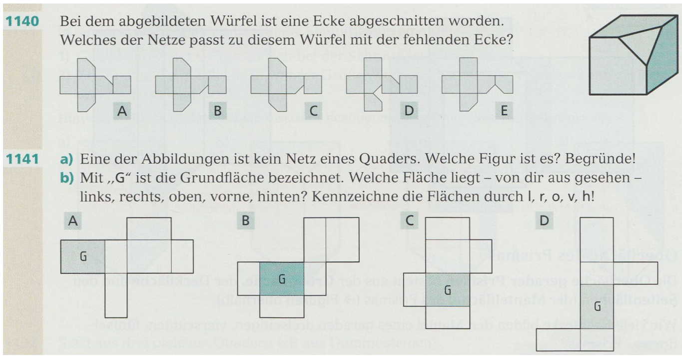


Abb. 4: Netze erkennen (Reichel/Humenberger 2008 S. 258)

7. Schulstufe: Beim Vervollständigen von Zeichnungen wie in Abbildung 5 wird auf den Erfahrungsschatz der Kinder zurückgegriffen. Das Erkennen *räumlicher Beziehungen* (vgl. 2.2) ist gefragt.

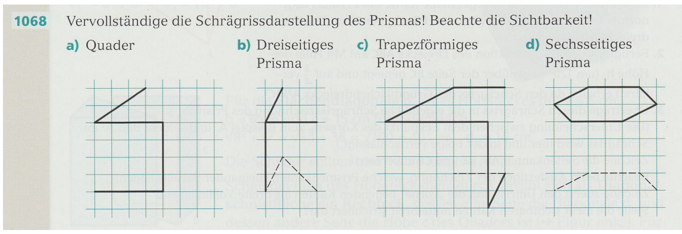


Abb. 5: Bilder ergänzen (Reichel/Humenberger 2009 S. 237)

Im Bereich der 8. Schulstufe steht weniger die konstruktive als die rechnende Raumgeometrie im Vordergrund. So bleibt es auch in der Sekundarstufe II, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dennoch ist das Lösen der Aufgaben ohne entsprechende Raumvorstellung schwierig bis unmöglich!

9. Schulstufe: Das in Abbildung 6 geforderte graphische Ermitteln der Entfernung zweier Punkte ist eher die Ausnahme und erfordert Kenntnisse, die in Richtung *mentaler Rotation* (vgl. 2.2) der Stützdreiecke gehen. Eine richtige Skizze ist selbstverständlich Voraussetzung für eine erfolgreiche Bewältigung der Aufgabe.

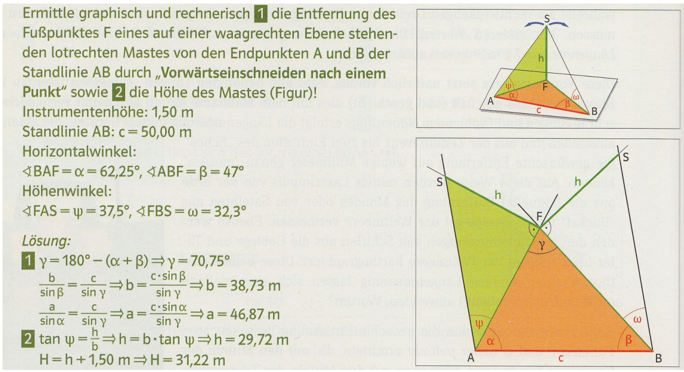


Abb. 6: Rechnerische und graphische Entfernungsermittlung (Götz/Reichel 2010 A S. 53)

10. Schulstufe: In den Abbildungen 7a und 7b werden Gleichungen in drei Variablen *veranschaulicht*, um unterschiedliche Lösungsfälle verstehen und interpretieren zu können.

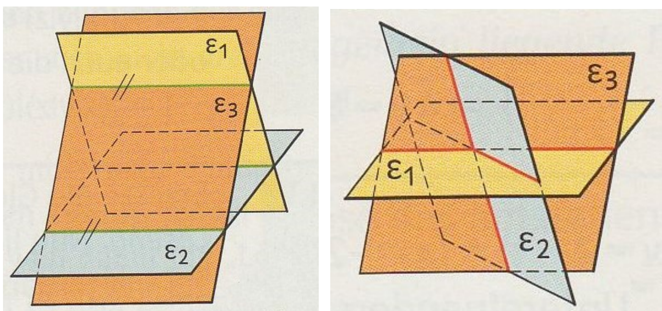


Abb. 7a und 7b: Veranschaulichung von Gleichungen (Götz/Reichel 2010 B S.53)

11. Schulstufe: Abbildung 8 zeigt Bilder von Flächen 2. Grades („Quadriken“), deren *Veranschaulichung* (=Vorstellungsvermögen) Voraussetzung für ein sinnvolles Herangehen an die Aufgabenstellungen und Verstehen von Anwendungen dieser Flächen ist: Denken wir etwa an die Entstehungsweise durch Rotation von Kegelschnitten oder das Erkennen von Schnittkurven etwa mit Koordinatenebenen.

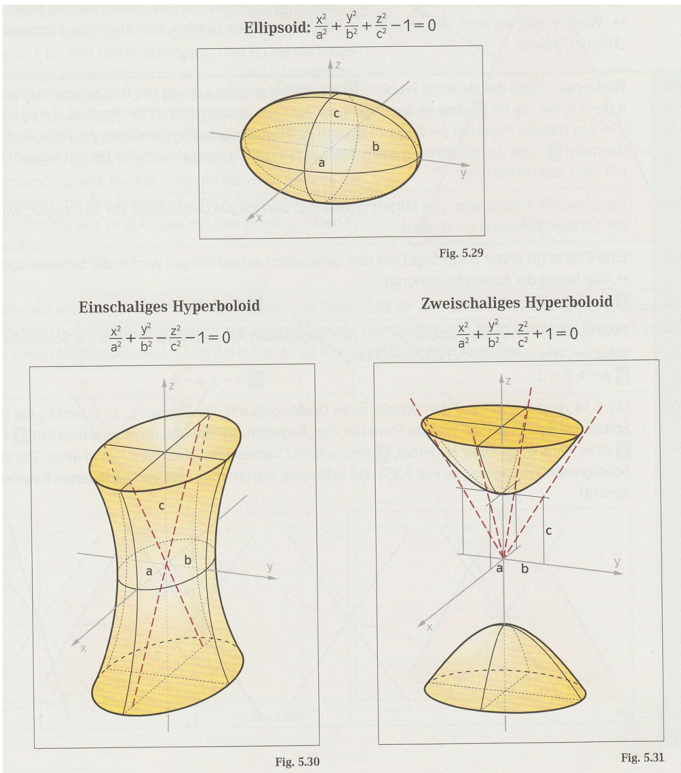


Abb. 8: Veranschaulichung von Flächen 2. Grades (Götz/Reichel 2011 S.225)

12. Schulstufe: Abbildungen 9a und 9b zeigen die *Veranschaulichung* von Drehflächen, deren Volumen oder Schwerpunkt berechnet werden soll.

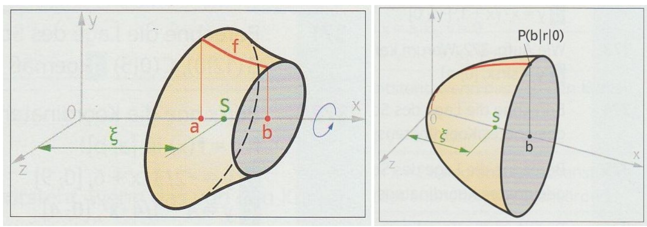


Abb. 9a und 9b: Veranschaulichung von Drehflächen (Götz/Reichel 2013 S.105)

Im Wesentlichen bestätigt die Durchsicht von Schullehrbüchern die Tatsache, die auch beklagt wird (Drüke-Noe/Ludwig 2016), dass nämlich in der Oberstufe hauptsächlich die rechnende Geometrie im Vordergrund steht und keine echt raumgeometrischen Fragestellungen vorkommen (wie Körper zerlegen, unterschiedliche Ansichten darstellen, zwischen Zwei- und Dreidimensionalen wechseln, Körper bauen usf.).

2. Rumvorstellung als Teil der menschlichen Intelligenz

Über Raumvorstellung zu reden ist unmöglich, ohne auf *Intelligenz* zumindest in aller Kürze einzugehen. Das Wort *Raumintelligenz* erfasst beide Begriffe prägnant. Wenn man Intelligenz als Gruppe von Begabungen sieht, dann soll Raumintelligenz jene Begabungen zusammenfassen, die einen Menschen befähigen, räumliche Problemstellungen zu lösen – und dies ohne die Versuch-und Irrtumsmethode.

2.1 Intelligenzmodelle

Im Laufe des letzten Jahrhunderts wurden im Rahmen der systematischen Erforschung von Intelligenz ein- und mehrdimensionale Modelle zum Verständnis derselben entwickelt, deren Kernideen durch zwei Zitate beleuchtet seien:

> „Intelligenz ist die allgemeine Fähigkeit eines Individuums, sein Denken bewusst auf neue Forderungen einzustellen; sie ist die allgemeine geistige Anpassungsfähigkeit an neue Aufgaben und Bedingungen des Lebens." (Wilhelm Stern, 1912)

> „Intelligenz ist die zusammengesetzte und globale Fähigkeit des Individuums, zweckvoll zu handeln, vernünftig zu denken und sich mit seiner Umwelt wirkungsvoll auseinanderzusetzen." (David Wechsler, 1961)

Im Laufe der Untersuchungen versuchte man, durch die Entwicklung mehrdimensionaler Modelle, einzelne Teilbereiche der Intelligenz auszumachen, dies in der Hoffnung, diese dann besser messen zu können als allgemein „Intelligenz". In diesem Zusammenhang sei an Forscher wie Spearman (1904), Thurstone (1938), Vernone (1961), Guilford (1967) oder Gardner (1991) erinnert. Dabei gab es auch extreme Modellbildungen mit bis zu 120 Teilfähigkeiten, wie sie zum Beispiel im Strukturmodell von Guilford zu finden sind. Sehr häufig wird in der Literatur das 7-Faktoren-Modell (vgl. Abb. 10) von Louis Thurstone zitiert. Thurstone hat ab 1924 bis 1955 Arbeiten über Intelligenz und deren Faktoren publiziert. Ein auf den Leistungen historischer Persönlichkeiten fußendes Modell entwickelte Howard Earl Gardner (*1943) in den 1980er Jahren.

Sieben Primärfaktoren

- Zahlenrechnen (numbers)
- Sprachverständnis (verbal comprehension)
- **Raumvorstellung** (space)
- Gedächtnis (memory)
- Schlussfolgerndes Denken (reasoning)
- Wortflüssigkeit (word fluency)
- Auffassungsgeschwindigkeit (perceptual speed)

Abb. 10: Das Faktorenmodell nach L. Thurstone

In seiner *Theorie der multiplen Intelligenzen* versteht er unter Intelligenz eine *Anzahl* von Fähigkeiten oder Fertigkeiten, die notwendig sind, *echte* (genuine) Probleme zu lösen oder Schwierigkeiten in einem bestimmten kulturellen Umfeld zu überwinden.

Dazu gehört auch die Fähigkeit, (neue) Probleme zu erkennen und damit den Grundstein für den Erwerb von neuem Wissen zu legen. Er suchte bei seinen Überlegungen historisch herausragende Talente wie Einstein, Gauß, Beethoven, Strawinsky oder Gandhi. Gerade deswegen ist sein Modell auch für den Schulunterricht im Hinblick auf fächerverbindenden Unterricht besonders interessant.

Multiple Intelligenzen

- Sprachlich-linguistische Intelligenz
- Musikalisch-rhythmische Intelligenz
- Logisch-mathematische Intelligenz
- Körperlich-kinästhetische Intelligenz
- Bildlich-räumliche Intelligenz
- Intrapersonelle Intelligenz
- Interpersonale (soziale) Intelligenz
- Naturalistische Intelligenz
- Existenzielle (spirituelle) Intelligenz

Abb. 11: Multiple Intelligenzen nach H. Gardner

Der Vergleich mit einem Faktorenmodell drängt auf. Ob dies auch die Absicht von Gardner war, soll hier offengelassen werden. Persönlichkeiten mit hoher bildlich-räumlicher Intelligenz sind für Gardner zum Beispiel Leonardo da Vinci, Michelangelo, Raffael, van Gogh oder Pablo Picasso. Diese Form der Intelligenz wird einerseits für das Erfassen und Bearbeiten großer Räume vorausgesetzt, besonders bei Seeleuten oder Piloten vorausgesetzt, andererseits für das Erfassen enger begrenzter Raumfelder, wie es bei Zahntechnikern, Chirurgen, Schachspielern oder Graphikern erforderlich sein kann. Die Kritiker an Gardners Theorie weisen auf deren starke konzeptionelle Schwächen hin und dass sie bisher empirisch nicht erfolgreich überprüft wurde. Innerhalb der akademischen Intelligenzforschung werden multiple Intelligenzen daher nicht ernsthaft thematisiert.

2.2. Raumvorstellung – Faktorenmodelle

Raumvorstellung besteht – auch im Schulunterricht – aus dem Gebrauch mentaler Bilder. Sie bedeutet, die visuell-räumliche Welt real oder in Bildern wahrzunehmen, zu transformieren oder überhaupt erst im Kopf zu erzeugen. Selbstredend geht es um das Zurechtfinden in unserer dreidimensionalen Umwelt. Raumvorstellung ist ein Bündel von Fähigkeiten, für die es kein eigenes spezielles Organ gibt.

Ähnlich wie bei den Intelligenzmodellen wurde auch bei der Raumvorstellung anfangs von einer Ein-Faktor-Theorie ausgegangen. El Koussy hat 1935 seine Untersuchungen zu einem Generalfaktor für mechanische, räumliche und handwerkliche Betätigung publiziert (Rost 1977, p 61f). Die meisten Forscher habe danach allerdings Mehrfaktorentheorien bevorzugt, deren Sinn es – wie schon bei den Intelligenzmodellen – ist, die Raumvorstellungsfähigkeit genauer messen zu können.

Von den vielen Forschern sei hier wieder die Entwicklung von Louis Thurstone hervorgehoben: Er und andere haben zunächst zwei Faktoren, nämlich *Wahrnehmung statischer räumlicher und geometrischer Beziehungen* und *Veranschaulichung veränderter Positionen oder Transformationen*, später dann drei Faktoren nämlich *Veranschaulichung*, *räumliche Beziehungen* und *räumliche Orientierung* unterschieden. (Rost 1977, p 65ff)

Veranschaulichung steht dabei für die gedankliche Vorstellung von Bewegungen. Diese umfasst mentale Rotationen, räumliche Verschiebungen oder Faltung von Objekten oder ihrer Teile.

Räumliche Beziehungen steht für die Fähigkeit, die räumlichen Konfigurationen von Objekten oder ihrer Teile zu erfassen. Anders ausgedrückt bezeichnet dies die Fähigkeit, ein Objekt aus unterschiedlichen Perspektiven zu identifizieren.

Räumliche Orientierung steht schließlich für die richtige räumliche Einordnung der eigenen Person in eine räumliche Situation.

Bei den vielen Modellen, die für die Erklärung des Phänomens *Raumintelligenz* entwickelt und getestet wurden, wird leider vor allem der Begriff *Veranschaulichung* (*Visualization*) sehr vielfältig und nicht einheitlich im oben erklärten Sinn gebaucht. So fassen zum Beispiel M.C.Linn und A.C.Petersen (1985) in ihrer Metastudie Veranschaulichung als Generalfaktor auf, den sie durch mentale Rotation und räumliche Wahrnehmung ergänzen. Für detailliertere Beschreibungen sei auf die Werke von P. Maier (1994, 1998) verwiesen. Er bevorzugt wiederum ein Fünffaktorenmodell: Veranschaulichung, räumliche Beziehungen, räumliche Wahrnehmung, mentale Rotation und räumliche Orientierung.

Für den Schulunterricht bedeutet dies, dass etwa die Beispiele in Abbildung 12 und 13 durchaus unterschiedlichen Raumvorstellungfaktoren (Abb. 12: Räumliche Beziehungen, Abb. 13: Veranschaulichung) zuzuordnen sind und auch, dass diese vermutlich von verschiedenen Kindern unterschiedlich gut gelöst werden können.

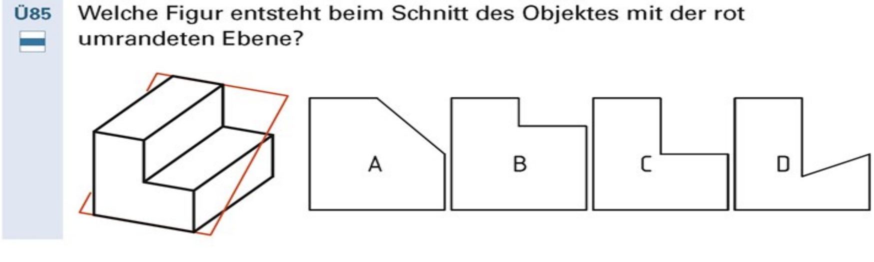


Abb. 12: Schnittfiguren zuordnen, *mental cutting*
(Blümel/Müller/Vilsecker 2012, S. 43)

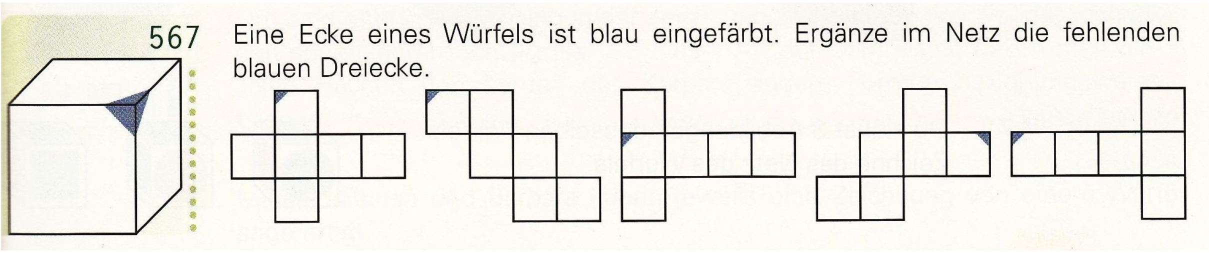


Abb. 13: Schrägriss und Netzdarstellung
(Kraker/Plattner u.a. 2013, S. 143)

Beispiele der Form des *mental cuttings* wie in Abbildung 12 können als Trainingsbeispiele für die Vorstellung von Computertomografiebildern aufgefasst werden (Abb.14) Die Grafik zeigt lediglich einen kleinen Teil der üblicherweise 12 oder 24 Schnittbilder. Ergänzt wurde die 3D-Darstellung im linken oberen Bildteil, die das Programm aus den Schnittbildern errechnet und gezeichnet hat.

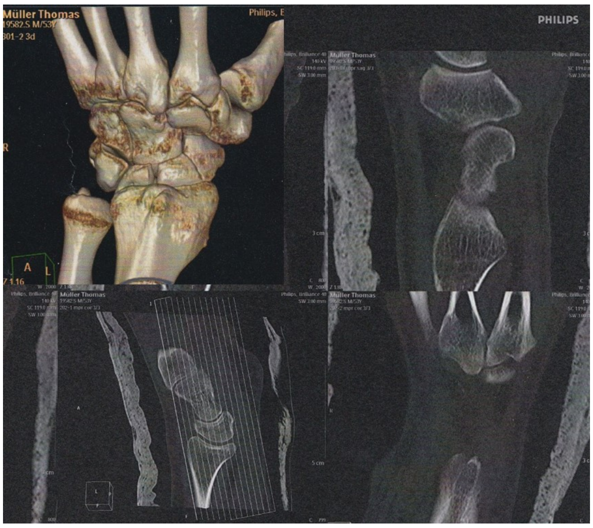


Abb. 14: Ausschnitt eines CT-Bildes der Handwurzelknochen

Den in Abschnitt 3 folgenden Ausführungen liegt ein 4-Faktoren-Modell zu Grunde. Deshalb soll auf dieses Modell kurz eingegangen werden. Es wurde ursprünglich für das Projekt *GeodiKon* (vgl. 3) entwickelt (Maresch/Müller/Scheiber 2015), in welchem es in erster Linie um Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben ging. Dieses Modell ist sehr gut an Aufgabenstellungen im Raumgeometrieunterricht angepasst.

Veranschaulichung/räumliche Visualisierung meint, dass Objekte in verschiedenen Bildern / Repräsentationen (z.B. Schrägriss und Netz) vorhanden sind. Dabei soll etwa entschieden werden, ob beide Darstellungen wirklich dasselbe Raumobjekt zeigen (vgl. etwa Abb. 1, Abb. 4 oder Abb. 13).

Beim Faktor *Räumliche Beziehungen / Ganzes und seine Teile* werden Teile eines Raumobjekts zu einem Ganzen zusammengefügt, Schnittfiguren eines Raumobjekts sollen geordnet oder ausgemustert werden (vgl. Abb. 12). Auch Schnittdarstellungen, wie sie bei Extremwertbeispielen auftreten, können diesem Faktor zugezählt werden (vgl. Abb. 15).

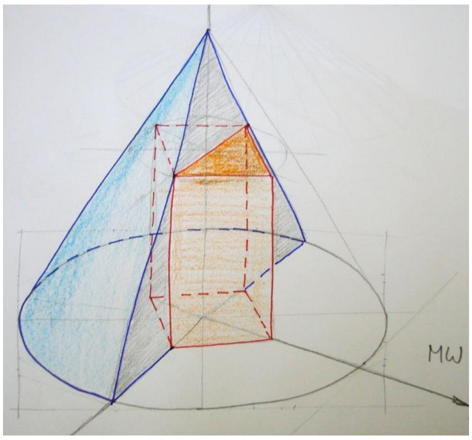


Abb. 15: Ein Quader soll einem Kegel eingeschrieben werden.

Einen eigenen Faktor stellt in diesem Modell *Mentale Rotation/Objektbewegung* dar. Objekte werden gedreht dargestellt und sollen wiedererkannt oder ergänzt werden (vgl. Abb. 22). Andererseits wird Rotation/Bewegung auch als *Strategie* bei der Lösung von Aufgaben, die anderen Faktoren zugeordnet werden, verwendet. Bedingt könnte Abb. 6 diesem Faktor zugerechnet werden, mit gleichem Recht auch dem Faktor *Veranschaulichung/räumliche Visualisierung.*

Räumliche Orientierung bedeutet Fähigkeit, sich mental bzw. real im Raum zurechtzufinden, wobei es darum geht, sich selbst in Gedanken um eine räumliche Anordnung von Objekten zu bewegen. Das Volksschulbeispiel mit Haus in Abb. 2 kann diesem Faktor zugeordnet werden. Ein Poster, das für österreichische Schulen frei zur Verfügung steht, fasst dieses Vierfaktorenmodell zusammen. (ADI 2016)

Abb. 16: Poster des 4-Faktoren-Modells von GeodiKon (ADI 2016

Abschließend soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass Aufgabenstellungen auch mehreren RV-Faktoren gleichzeitig zur Bearbeitung beanspruchen.

2.3 Empfindung und Wahrnehmung

Da es im nächsten Abschnitt um das tatsächliche Lösen von Raumvorstellungsaufgaben geht, muss noch auf zwei wichtige Voraussetzungen für eine erfolgreiche Durchführung eingegangen werden, nämlich *Empfindung* und *Wahrnehmung*. Die Wahrnehmungspsychologie (Birbaumer/Pauli o.J.) beschreibt Empfindung als *einfache Einheit der Sinneserfahrung wie* Helligkeit, Farbe, Wärme, …mit ihren vier Grunddimensionen: *Räumlichkeit* (wo am Körper findet die Reizempfindung statt), *Zeitlichkeit* (Beginn und Ende der Empfindung), *Qualität* (z.B. bei Sehen nur Grauwerte oder auch Farben) und *Intensität* (z.B. Lautstärke, Stärke der Helligkeit, …)

Unter *Wahrnehmung* werden jene Vorgänge zusammengefasst, die einer Sinnesempfindung Bedeutung verleihen. Das Ergebnis ist dann eine innere Repräsentation des wahrgenommenen Objekts.

An einem Beispiel soll die Bedeutung von Empfindung und Wahrnehmung vor dem eigentlichen Lösen einer Raumvorstellungsaufgabe deutlich gemacht werden. Da diese Zeilen vermutlich hauptsächlich Mathematiklehrpersonen lesen, soll dafür ein mathematikfernes Beispiel gewählt werden. Beim Betrachten von Abbildung 17 werden die meisten die *Empfindung* von schwarzen Flecken auf weißem Grund haben. Der gesamte Aufnahmevorgang ist an sich sehr selektiv. Bei den meisten Leserinnen und Lesern erfolgt neben der Empfingung vermutlich deshalb noch keine *Wahrnehmung,* die sich in der Identifikation mit einem bekannten Objekt äußert. Die empfundenen Sinneseindrücke können noch nicht mit einem gespeicherten (bekannten) Objekt verknüpft werden. Vgl. dazu auch die Hinweise zum Prozess der Informationsverarbeitung in (Müller 2012, p19). Zur Auflösung der Aufgabe vergleiche Abb. 30 im Anhang vor dem Literaturverzeichnis.

Abb. 3-1. (a) Der Unterschied zwischen Empfindung und Wahrnehmung. Schauen Sie das Bild mindestens 15 Sekunden an, um herauszufinden, was es darstellt. Wenn Sie nichts erkennen können, so erleben Sie den Unterschied zwischen Empfindung und Wahrnehmung. Schauen Sie nun Teil **(b)** dieser Abbildung auf der nächsten Seite an, und dann wieder das Bild hier. Was nehmen Sie nun wahr? Hier hat Wahrnehmungslernen stattgefunden. Nach Sekuler, Blake, 1990 in Bourne LE, Russo RF. Psychology. W. Norton, New York (1998) S. 135

Abb. 17: Beispiel zur Demonstration von Empfindung und Wahrnehmung

Ähnlich geht es vermutlich vielen Kindern, wenn sie vor Aufgaben wie in Abb. 5 stehen und zum ersten Mal Bilder von Quadern oder allgemeinen Prismen vervollständigen sollen.

Besonders soll betont sein, dass das konkrete Operieren im Zuge des Lösungsprozesses von Aufgaben wie in Abb. 4 bis 6 neben der Raumvorstellung vor allem Erfahrung voraussetzt: Nach dem Sehen und der Verarbeitung der Reize erfolgt im Wahrnehmungsvorgang die Verknüpfung mit den gespeicherten Erfahrungswerten in der *Wissensbasis* Da der Abgleich der visuellen Eindrücke mit gespeicherten Bildern auch Anstrengung bedeutet, erfolgt der gesamte Vorgang nur unter Vorhandensein einer gewissen Motivation! Auf den Faktor Motivation als Grundlage allen erfolgreichen Beispiellösens kann hier nicht weiter eingegangen werden.

2.5 Folgerungen für den Unterricht

Welche Konsequenzen können/sollen nun von den Lehrpersonen aus dem letzten Abschnitt gezogen werden? Damit im Zuge des Lösungsvorgangs eine Verknüpfung mit der Wissensbasis erfolgen kann, muss diese entsprechend befüllt sein. Sollen beispielsweise die drei von einem Punkt ausgehenden Strecken in Abb. 18 zum Parallelriss eines Körpers ergänzt werden, müssen im persönlichen Erfahrungsschatz entsprechende Bilder zumindest ansatzweise vorhanden sein.

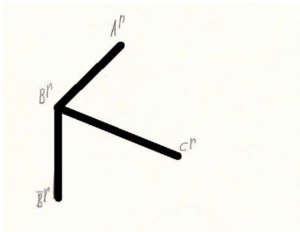


Abb. 18: 3 Strecken

Der Auftrag, diese drei Strecken zum Bild eines Würfels zu vervollständigen, lenkt die Aufmerksamkeit auf die Gestalt eines Würfels und dessen Abbildungen in vergangenen Unterrichtsstunden.

Für Lehrpersonen bedeutet dies den Auftrag, eine stabile Wissensbasis zumindest mit den Bildern und Eigenschaften der *Grundkörper* (Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel, Torus) systematisch aufzubauen, auf die beim Lösen von Aufgaben zurückgegriffen werden kann. In diesem Zusammenhang sei auf die Diskussion hingewiesen, wieviel *Vorratswissen* (auch träges, deklaratives oder statisches Wissen genannt) versus *prozeduralem* Wissen, das durch lernendes Handeln entsteht, benötigt wird. (Reinmann 2005 S. 39ff)

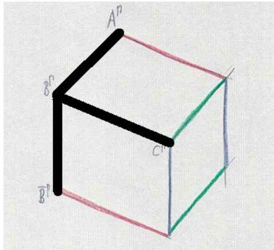


Abb.19: Ergänzung zum Würfelbild

Was alles sollte diese geometrische Wissensbasis für alle Schülerinnen und Schüler unbedingt enthalten und was ist bloß Wissen, das im Sinne des handelnden Lernens jederzeit hergeleitet werden kann? Eine allgemeingültige Antwort auf diese Frage wird es wohl nicht geben und führt in die Diskussionen in Zusammenhang mit mathematischer Grundbildung. (Fischer/Greiner/Bastel 2012)

Noch ein Hinweis zur Lösung der Bildergänzung von Abb. 18: Das Bild der drei Strecken könnte natürlich auch zu Bildern anderer Körper ergänzt werden. Eine Möglichkeit davon zeigt Abb. 20 als Bild eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas.

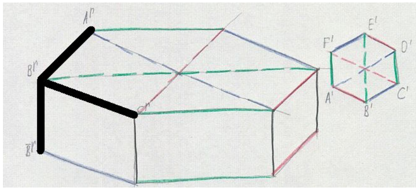


Abb. 20: Ergänzung zum Prismenbild

Ähnlich wie Kleinkinder zunächst Bilderbücher ansehen und erst in der zweiten Stufe selbst zeichnen, könnte ein Umdenken im Unterricht erfolgen, indem viele Bilder von Raumobjekten angesehen / betrachtet / beschrieben werden und Aufgabenstellungen dazu gelöst werden. Erst danach sollten Bilder ergänzt und selbst gezeichnet werden.

Lehrpersonen, die durch ihren Unterricht den Aufbau eines Erfahrungsschatzes ermöglicht haben, und nun nach einer Möglichkeit suchen, Auskunft über die Ausprägung der Intelligenzfacette *Raumvorstellung* bei ihren Schülerinnen und Schülern zu erhalten, zeigt der folgende Abschnitt eine Möglichkeit der Testung auf.

3. MRS7-h als Vorabprojekt

Der Auslöser für die Entwicklung und freie Bereitstellung von Raumvorstellungstests für alle Lehrpersonen war eine Untersuchung über Strategien zur Lösung von Raumaufgaben, das bereits in 2.2. erwähnte Projekt GeodiKon (2012 – 2014). Vier international anerkannte Raumvorstellungstests wurden dafür kostenfrei zur Verfügung gestellt. Mehr als 900 Schülerinnen und Schüler aus Niederösterreich, der Steiermark und Salzburg nahmen teil. (Maresch 2014) Die Testbatterie der Pre- und Posttests bestand aus vier professionellen Raumvorstellungstests: *Dreidimensionaler Würfeltest* (3DW-Test; Gittler, 1984), *Differential Aptitude Test* (DAT; Bennett, Seashore, Wesman, 1973), *Mental Rotation Test* (MRT; Peters, Laeng, Latham, Jackson, Zaiyouna, Richardson, 1995) und *Spatial Orientation Test* (SOT; Hegarty, Waller, 2004). Die Tests waren verständlicherweise mit der Auflage versehen, sie ausschließlich für dieses Projekt zu verwenden. Nun hatten sich im Vorfeld für Geo**diKon weit mehr Kolleginnen und Kollegen gemeldet, die mit ihren Klassen teilnehmen wollten, als** tatsächlich angenommen werden konnten. So entstand die Idee für ein neues Projekt mit dem Namen *RIF-3D* (**R**aum**i**ntelligenz**f**örderung), bei dem im Fokus steht, eigene Tests zu entwickeln, die interessierte Lehrpersonen frei im Unterricht verwenden dürfen.

Folgende Bemerkungen beziehen sich nur noch auf die Entwicklung eines Kurztests als Vorabprojekt. Der Name *MRS7-h* bezieht sich auf den Test selbst: MR steht für mentale Rotation, S7 steht für, dass die Aufgaben mit einer gewissen Geschwindigkeit durchgeführt werden sollen (Speed 7 Minuten). Beispiele zum Testen allein des Faktors *Mentale Rotation* wurden im Rahmen einer Bachelorarbeit an der KPH Wien/Krems von einem Studierenden (Johannes Reiß) unter Anleitung des Autors dieser Zeilen (vgl. 2.2) erstellt. Dabei sollten die Aufgaben bereits für Kinder aus der 4. Schulstufe gelöst werden können, also möglichst kindgerecht sein und möglichst konkrete und verständlich-erkennbare Objekte beinhalten, also z.B. keine reinen Würfelketten, wie sie oft bei solchen Tests zur Anwendung kommen.

3.1 Die Testentwicklung

Im Zuge der Beispielentwicklung entstanden sowohl Zeichnungen von Kantenmodellen – genauer: weiß gefüllten Volumskantenmodellen – als auch solche mit schattierten Teilflächen. Dabei interessierte auch, ob es Unterschiede bei der Lösungshäufigkeit von Kantenmodellen oder jenen mit Teilschattierungen gäbe.

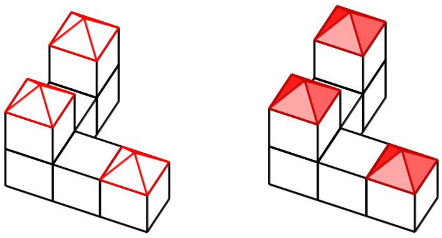


Abb. 21: Kantenmodelle und schattierte Objekte

Das Design jeder Aufgabe sollte gleich sein: 2 aus 5 gezeichneten Objekten, aus unterschiedlichen Blickwinkeln dargestellt, sollen tatsächlich mit einem Ausgangsobjekt identisch sein. Richtig von falsch unterscheidet sich in allen Fällen im Durchbrechen der Symmetrie der Objekte.

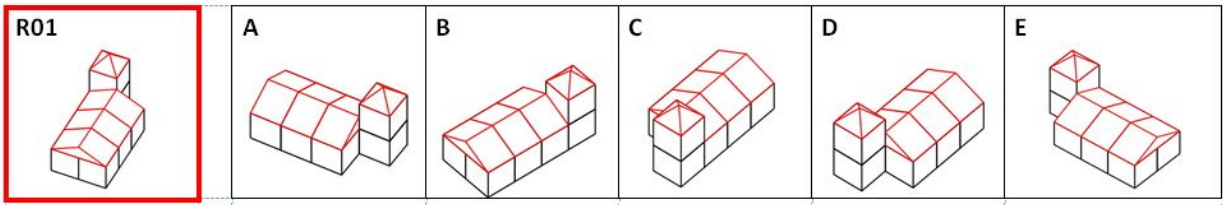


Abb. 22: Eine Testaufgabe: 2 aus 5 Bildern sind richtig.

Um das Niveau der Aufgaben relativ niedrig zu halten (ab 4. Schulstufe primar!) wurden alle Objekte auf einer horizontalen Ebene aufgestellt und nur in dieser gedreht. Zusätzlich wurden bei jeder Aufgabe nur Ansichten von oben gewählt und nur in fünf vorab überlegten Richtungen verdreht. Insgesamt stand dann ein Pool von 200 Grafiken zur Verfügung, aus dem die 17 Aufgabenpaare komponiert wurden: Denn jede Aufgabe wurde genau zweimal gestellt, einmal schattiert und einmal als Kantenmodell im obigen Sinn.

Parallel zur Testkomposition erfolgten Überlegungen zur Wahl der Testsoftware. Es galt zwischen den Programmen *Quizmaker* (www.quizmaker.com 2016-06-16) oder *LimeSurvey* (www.limesurvey.com 2016-06-16) zu wählen. Wegen der Programmier- und einfachen Exportmöglichkeit in eine EXCEL-Datei fiel die Entscheidung auf LimeSurvey.

3.2 Die Testung

Damit die aufwändige Arbeit nicht nur für die vier Klassen im Rahmen der Bachelorarbeit gemacht war, wurde kurzfristig entschieden, eine Aussendung über das „Netzwerk der Geometrie“ zu bean-

		richtige	Kanten-Bsp	Schatt. Bsp.	TN	
	arithm Mittelwert=	21,31	10,62	10,69	13	
id	submitdate	Richtig sind	Richti	Richtig	Alter	Sex
2047	2015-03-03 12:42:40	19	12	7	12	M
2048	2015-03-03 12:43:04	19	9	10	12	M
2049	2015-03-03 12:42:21	27	13	14	12	M
2050	2015-03-03 12:42:26	23	12	11	13	M
2051	2015-03-03 12:43:18	24	11	13	12	M
2052	2015-03-03 12:42:33	16	7	9	13	M
2053	2015-03-03 12:42:21	21	10	11	12	M
2054	2015-03-03 12:42:40	18	8	10	13	M
2055	2015-03-03 12:42:28	34	17	17	13	M

Tabelle 1: Beispiel für eine Auswertung

tragen. Dadurch wurden die Infos an über 2000 Lehrpersonen aus dem Bereich des Geometrieunterrichts in Österreich gesandt: Schon am ersten Abend nach der Aussendung am 18. Februar 2015 um 12.10 Uhr gab es über 100 auswertbare Datensätze, eine Woche später über 1000 und Anfang Juni 3050 Datensätze.

Um den Klassenlehrpersonen eine Rückmeldung geben zu können, wurde die Excel-Rohdatei entsprechend gefiltert und es wurden Teilberechnungen durchgeführt. Dann wurden die Klassenlisten mit den Einzelergebnissen an jene Lehrpersonen geschickt, die per Mail darum gebeten hatten. Es waren knapp mehr als 100 Klassen, die händisch auf diese Art ausgewertet wurden. (vgl. Tabelle 1)

Bereits nach den ersten paar hundert Datensätzen zeigte sich, dass eine Normierung nach Alter, Geschlecht und Schultyp vorzunehmen war, um verwertbare Aussagen zum Entwicklungsstand des Raumvorstellungsvermögens in Bezug auf mentale Rotation machen zu können. So konnte bei den Rückmeldungen an die Lehrpersonen eine Vergleichstabelle mit dem Abschneiden der anderen Schülerinnen und Schüler derselben Altersstufe und desselben Schultyps mitgesandt werden.

Bei *Schultyp* wurde lediglich nach Gymnasium und Neue Mittelschule (Hauptschule) unterschieden. Diese Tabelle nährte sich jeweils aus den Ergebnissen aller bis dahin Teilnehmenden.

Für eine abschließende Auswertung können von den 3050 vollständigen Datensätzen 2127 Datensätze der 5. bis 8. Schulstufe zugeordnet werden. Davon waren 810 aus dem (Real-)Gymnasium und 1317 aus den NMS, vom Geschlecht her gesehen waren 1222 männlich und 905 weiblich. Die Teilnehmerklassen verteilen sich auf das gesamte Bundesgebiet (Abb. 23).

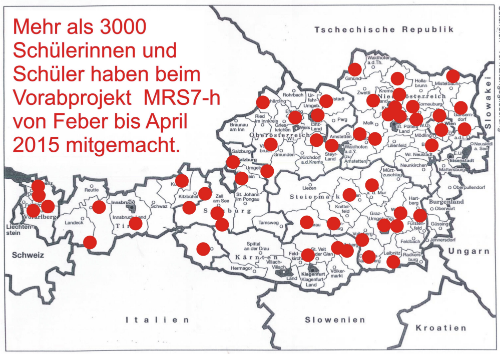


Abb. 23: TeilnehmerInnen aus ganz Österreich

3.3 Die Testergebnisse

Wie gut korreliert der Test mit bereits etablierten Testverfahren zur Mentalen Rotation, konnte mangels Vergleichstestung nicht festgestellt werden. So wurden eigene Überlegungen zur Validität angestellt, die in der Folge kurz angeführt seien.

Schon die ersten Boxplotdarstellungen zur Untersuchung der Lösungsvielfalten zwischen Kanten- und schattierten Aufgaben zeigen, dass kein Unterschied in den Lösungshäufigkeiten zwischen beiden Aufgabentypen besteht (Abb. 24). Der erwartete Effekt, dass sich die Anschaulichkeit durch das Färben einiger Teilflächen erhöhen

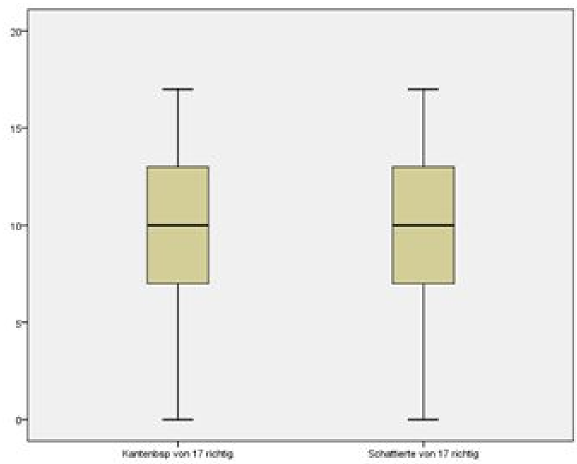


Abb. 24: Kein Unterschied bei den Ergebnissen bei den Kanten- und schattierten Aufgaben

würde und dadurch schattierte Beispiele besser gelöst würden, tritt nicht ein. Der Korrelationskoeffizient von $r = 0{,}946$ (mit $p < 0{,}001$) bestätigt den signifikanten Zusammenhang zwischen den beiden Testserienergebnissen. Die scheint auch über alle vier Schulstufen (5. – 8.) gleich zu sein.

Deshalb erfolgen alle weiteren Untersuchungen nur noch für die Klasse der reinen Kantenbeispiele im obigen Sinne. Das Histogramm der Lösungshäufigkeiten für die Kantenbeispiele deutet auf eine Normalverteilungsannahme hin (Mittelwert (MW) = 9,84, Standardabweichung (SA) = 4,34). Auf Grund der großen Anzahl von Probanden ist eine gewisse Robustheit gegenüber Verletzungen dieser Annahme gegeben. Der Test von *Kolmogorov-Smirnov* zeigt allerdings, dass keine genügend gute Anpassung an eine Normalverteilung vorliegt. Dies hat die Konsequenz, dass nur sogenannte *nichtparametrische* Tests für weitere Untersuchungen verwendet werden können, die zu einer geplanten Normierung der Testergebnisse führen sollen.

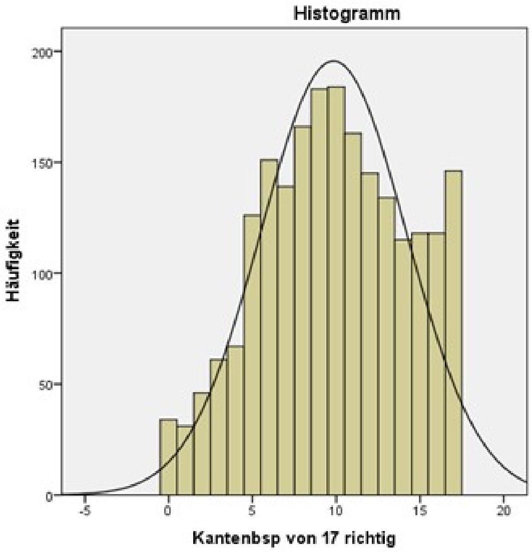


Abb. 25: Histogramm der Lösungshäufigkeiten

3.4 Der Weg zur Normierung

Als Voraussetzung für eine Normierung muss festgestellt werden, ob der Test zuverlässig ist, der Schwierigkeitsgrad passend und die Beispiele trennscharf sind:

Ist der Test zuverlässig/reliabel?

Sind die Beispiele konsistent? Praktisch wird die Zuverlässigkeit jedes einzelnen Beispiels so geprüft, dass jedes einzelne Item in Korrelation zur der um das betroffene Item reduzierten Gesamtskala gesetzt wird. *Cronbachs Alpha* ist jene Maßzahl für die innere Konsistenz einer Skala und bezeichnet das Ausmaß, in dem die Aufgaben miteinander in Beziehung stehen. Der Wert reicht von 0 bis 1, je größer, desto zuverlässiger der Test. Cronbachs Alpha beträgt 0,892. Eine Alternative ist die *Split-half*-Methode, dabei wird nur jedes zweite Beispiel zur Auswertung herangezogen und die Kontrollrechnung mit der zweiten Hälfte der Beispiele durchgeführt. Hier sind die Cronbachs Alpha-Werte: 0,810 bzw. 0,903. (vgl. Bühner, 2010, S. 166f und 241f)

Die nächste Analyse bezieht sich auf den *Schwierigkeitsgrad* der einzelnen *dichotomen* Items (Richtig-Falsch-Items). Für jedes Item kann die Zahl der TN mit der richtigen Antwort gezählt werden. So haben z.B. 90% der Probanden das Item 1 richtig beantwortet. Der *Schwierigkeitsindex* für Item 1 ist also 90. Eigentlich handelt es sich um einen *Leichtigkeits*index: Je näher bei 100%, desto mehr haben das Beispiel gelöst, desto leichter ist es gefallen. Der Schwierigkeitsindex sollte zwischen 0,2 und 0,8 liegen (vgl. Abb. 26). Dies ist bei 10 der 17 Aufgaben der Fall. (vgl. Bühner, 2010, S. 222f)

Sind die Items *trennscharf*?

Die Trennschärfe ermöglicht eine Einschätzung, wie gut ein Item „zwischen Personen mit niedriger und hoher Merkmalsausprägung trennt“.

An sich berechnet man immer eine Korrelation zwischen einem Einzelitem und dem (um dieses Item reduzierte) Gesamtergebnis. Je höher der Korrelationskoeffizient, desto trennschärfer ist ein Beispiel. Man könnte eventuell sogar Beispiele mit geringer Trennschärfe (ev. Item 01) aus dem Test entfernen, weil sie keine neuen Erkenntnisse einbringen. (vgl. Abb. 26)

Mit diversen Tests [etwa U-Test von Mann und Whitney] bzw. der Effektstärkenberechnung z.B. nach Cohen bzw. Hattie werden nun die Unterschiede zwischen den Gruppen nach *Geschlecht* (vgl. Tabelle 2 und Abb. 27) und *Schulstufe* (vgl. Abb. 28) bestimmt und deren Zentralwerte (MW = AM, arithmetisches Mittel und SA, Standardabweichung) berechnet.

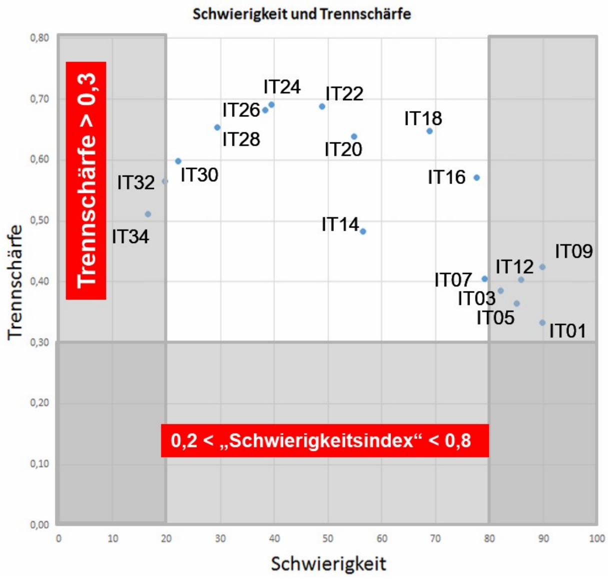


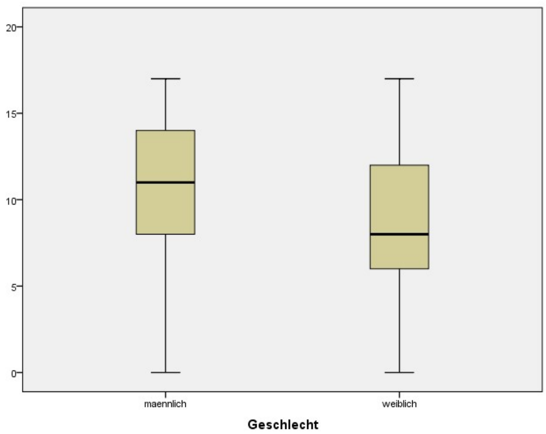
Abb. 26: Trennschäfte und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben

An sich geht es bei der Effektstärke um den Mittelwertunterschied dividiert durch die nach Gruppengröße gewichtete mittlere Standardabweichung Die gefundenen Mittelwertunterschiede entsprechen mit 0,4 (von 5. auf 6. Schulstufe), 0,36 (von 6. auf 7. Schulstufe) und 0,3 (von 7. auf 8. Schulstufe) relativ genau den von Hattie angegebenen 0,4 für die Entwicklung innerhalb eines Lernjahres.

	MW	SA	Effekt	n
Burschen	10,73	4,175	0,5	1222
Mädchen	8,63	4,265		905

Tabelle 2: Geschlechtsunterschiede in den Lösungshäufigkeiten

Diese Entwicklungsstufen spiegeln sich recht gut in den in Abbildung 28 dargestellten Boxplots wider. Der in Tabelle 2 mit 0,5 angegebene Effekt des Merkmals „männlich“ gegenüber „weiblich“ wird durch die Boxplotdarstellung in Abbildung 27 verdeutlicht und könnte als Einlernjahresunterschied zwischen Burschen und Mädchen zugunsten des männlichen Geschlechts interpretiert werden.



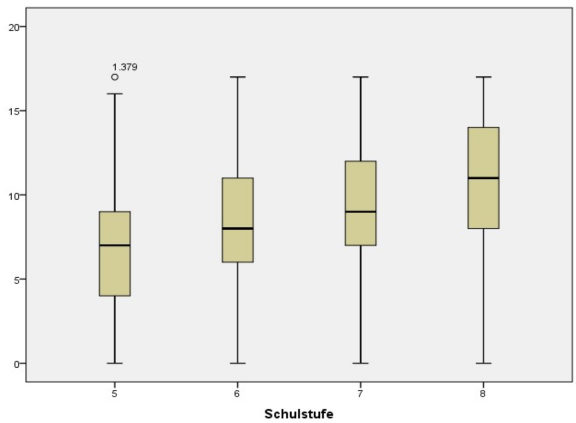


Abb. 27: Boxplot der Lösungshäufigkeiten von Burschen und Mädchen

Abb. 28: Boxplot der Lösungshäufikeiten der vier Schulstufen in der Sekundarstufe I

Die Normierung kann nun analog zur STANDARD-NINE-Methode [vgl. BÜHNER 2011, S.262f, auch Abb. 5.43] erfolgen.

Angepasst an die Schulnoten-einteilung soll hier allerdings eine Normierung in nur 5 Klassen erfolgen, also im Sinne einer STANDARD-FIVE-Teilung.

Geht man wie Bühner von einer annähernden Verteilung der Lösungshäufigkeiten im Sinne der Glockenkurve nach

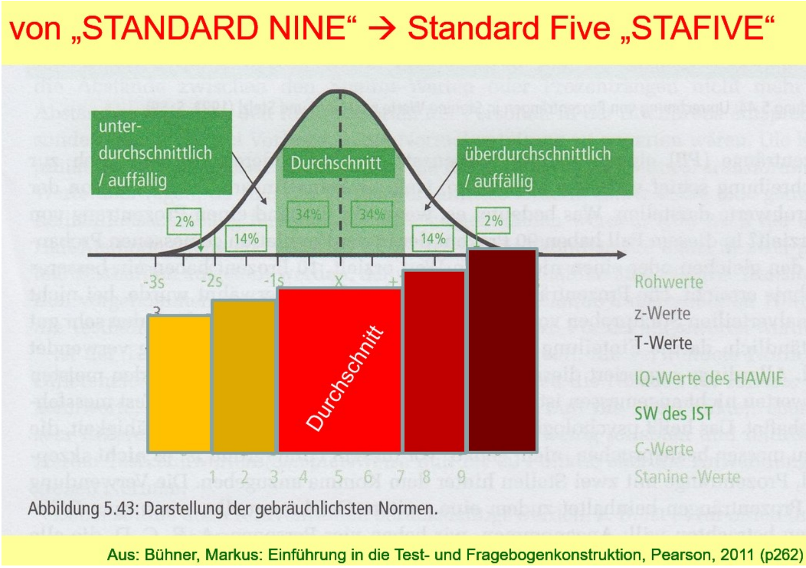


Abb. 29: Einteilung der Klassen nach der Methode Sandard Five

Gauß aus, ergibt sich die in Tabelle 3 angeführte Klasseneinteilung. Die jeweils extremen 2% der Stichprobe werden als „auffällig“ über/unterdurchschnittlich, die jeweils nächsten weniger extremen 14% als über/unterdurchschnittlich und die verbleibenden mittleren 68% als durchschnittlich qualifiziert.

Bezeichnung der Klasse	[Untere Grenze, Obere Grenze[
auffällig unterdurchschnittlich	[0 %, m-SA-14%[
leicht unterdurchschnittlich	]m-SA-14%, m-SA[
liegt im Durchschnitt	[m-SA, m+SA]
leicht überdurchschnittlich	]m+SA, m+SA+14%]
auffällig überdurchschnittlich	]m+SA+14%, 100%]

Tabelle 3: Standard Five-Klasseneinteilung

Aufgrund der oben beschriebenen Unterschiede nach Geschlecht, Schulstufen (und den hier nicht beschriebenen und naturgemäß vorliegenden Unterschieden zwischen den Schultypen NMS und AHS) muss die Normierung nach der Zahl der gelösten Beispiele sinnvollerweise getrennt nach Geschlecht, Schulstufe und Schultyp vorgenommen werden. Daraus ergibt sich die umfangreiche Tabelle 4. Aus dieser ist ersichtlich, dass der Test sinnvollerweise lediglich in der 5. und 6. Schulstufe NMS eingesetzt werden kann, um aussagerichtige Werte zu erhalten. Es ergibt sich sehr rasch ein Deckeneffekt, der wohl mit der Einfachheit der Beispiele zusammenhängt, geht es schließlich nur um Rotation in einer horizontalen Ebene.

Schultyp	Schulstufe	Geschlecht	auff. unterdurchschn.		unterdurchschn.		Durchschnitt		überdurchschn.		sehr überdurchschn.	
			Zahl der richtig gelösten Beispiele									
			von	bis	von	bis	von	bis	von	bis	von	bis
NMS	5	m	0	**0**	1	**3**	4	**10**	11	**13**	14	**17**
NMS	5	w	0	**0**	1	**2**	3	**9**	10	**13**	14	**17**
NMS	6	m	0	**0**	1	**4**	5	**12**	13	**15**	16	**17**
NMS	6	w	0	**0**	1	**4**	5	**11**	12	**14**	15	**17**
NMS	7	m	0	**2**	3	**5**	6	**13**	14	**17**	18	**17**
NMS	7	w	0	**0**	1	**3**	4	**12**	13	**16**	17	**17**
NMS	8	m	0	**2**	3	**6**	7	**14**	15	**18**	19	**17**
NMS	8	w	0	**0**	1	**3**	4	**12**	13	**16**	17	**17**
AHS/RG	5	m	0	**0**	1	**3**	4	**13**	14	**18**	19	**17**
AHS/RG	5	w	0	**1**	2	**3**	4	**7**	8	**9**	10	**17**
AHS/RG	6	m	0	**0**	1	**4**	5	**19**	20	**26**	27	**17**
AHS/RG	6	w	0	wegen zu geringer TN ist hier eine Normierung nicht möglich								
AHS/RG	7	m	0	**4**	5	**8**	9	**15**	16	19	20	17
AHS/RG	7	w	0	**1**	2	**5**	6	**13**	14	17	18	17
AHS/RG	8	m	0	**4**	5	**8**	9	**16**	17	20	21	17
AHS/RG	8	w	0	**2**	3	**6**	7	**15**	16	19	20	17

Tabelle 4: Normierung des MRS7-h-Tests für Schultyp, Schulstufe und Geschlecht

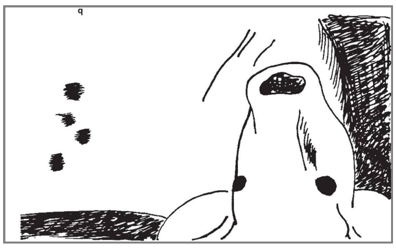
Diese Überlegungen und die Erfahrungen aus dem beschriebenen Vorabprojekt werden bei RIF-3D, dem eigentlich geplanten Projekt zur Entwicklung für freie Raumvorstellungstests zu den Faktoren *Orientierungsfähigkeit, mentale Rotation, räumliche Beziehungen* und *Visualisierung* eine Rolle spielen bzw. einfließen.

Zu weiteren Informationen und zum Link zum hier beschriebenen und analysierten Test kommt man unter http://geometrie.muel.at/raumvorstellungstest [2016-06-17]. Dort können auch die weiteren Entwicklungen des Projekts RIF-3D verfolgt werden.

Anhang

Um die Gestalt der in Abb. 17 dargestellten Figur wahrnehmen zu können, drehe man bitte diese Seite um 180°, dann erkennt man, um welches „Objekt“ es sich in Abb. 17 handelt.

Abb. 30:



Literatur

ADI (2016), Arbeitsgemeinschaft Didaktische Innovation für Geometrie: Poster A1 zu einem Vierfaktorenmodell der Raumvorstellung, www.geometry.at/adi (Zugriff 16.6.2016).

Birbaumer, N./Pauli, P.(o.J.): Allgemeine Psychologie in Klink und Forschung. Online: http://shop.aerzteverlag.de/media/db/000001/media000100320.pdf (Zugriff: 3.6.2016).

Bühner, M. (2011): Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion, 2. Aufl., München: Pearson.

Blümel, M./Müller Th./Vilsecker K. (2012): Geometrische Bilder. Wien: Österr. Bundesverlag.

Drücke-Noe, Ch./Ludwig M. (2016): Der Geometrie mehr Raum geben - Ideen für die dritte Dimension. In: *Praxis der Mathematik 69 / 58. Jahrgang (S. 2 – 7).*

Fischer, R., Greiner, U.; Bastel, H. (Hrsg. 2012): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Oberösterreich, Band 1; Linz.

Maresch, G. (2014): Erfolgreiche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben, (Forschungsprojekt GeodiKon). In Roth J. u. Ames J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014: Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz).* Münster: Waxmann.

Hanisch, G. (1984): Auswirkungen des Unterrichts in Darstellender Geometrie auf die Raumvorstellung. In: *Informationsblätter für Darstellende Geometrie (IBDG), 1, S. 58.*

Gittler, G. (1994): Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen. In*: Gittler, G., Jirasko, M., Kastner-Koller, U., Korunka, C., Al-Roubaie, A. (Hrsg.): (1994). Die Seele ist ein weites Land. Aktuelle Forschung am Wiener Institut für Psychologie (S. 105-122). Wien: WUV-Wiener Universitätsverlag.*

Götz, S./Reichel, H-C. (Hrsg.)/Müller R./Hanisch G. (2010 A): Mathematik 5. Wien: Österr. Bundesverlag.

Götz, S./Reichel, H-C. (Hrsg.)/Müller R./Hanisch G. (2010 B): Mathematik 6. Wien: Österr. Bundesverlag.

Götz, S./Reichel, H-C. (Hrsg.)/Müller R./Hanisch G. (2011): Mathematik 7. Wien: Österr. Bundesverlag.

Götz, S./Reichel, H-C. (Hrsg.)/Müller R./Hanisch G. (2013): Mathematik 8. Wien: Österr. Bundesverlag.

Grosser, N./Koth M. (2007): Alles klar 4. Linz: Veritas.

Kraker, M./Plattner G./Preis Ch./Schliegel E. (2013): Expedition Mathematik 1. Wien: E. Dorner.

Maier, P. H. (1994): Räumliches Vorstellungsvermögen, Europäische Hochschulschriften Reihe VI Psychologie Bd. 493. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Maresch, G. (2014): Erfolgreiche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben, (Forschungsprojekt GeodiKon). In Roth J. u. Ames J. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz). Münster: Waxmann.*

Maresch G., Müller T., Scheiber K. (2015): Das war Geodikon. In: *Informationsblätter für Darstellende Geometrie 34/ 1, S. 8 - 12*

Müller, T. (2012): Über das Lernen mit geometrischen Modellen. In: *Informationsblätter für Darstellende Geometrie 31/2, S. 16 – 21*

Reichel, H-C./Humenberger H. (Hrsg.) (2008): Das ist Mathematik, Band 2. Wien: Österr. Bundesverlag.

Reichel, H-C./Humenberger H. (Hrsg.) (2009): Das ist Mathematik, Band 3. Wien: Österr. Bundesverlag.

Reinmann, G. (2005): Blended Learning in der Lehrerbildung. Lengerich: Pabst Science Publishers.

Rost, D. (1977): Raumvorstellung Psychologische und pädagogische Aspekte. Weinheim und Basel: Beltz Forschungsberichte.

Verfasser

Thomas Müller
KPH Wien/Krems
Institut für Ausbildung Niederösterreich
Dr.Gschmeidlerstr. 28
3500 Krems
thomas.mueller@kphvie.ac.at